Ideales de distancia de gráficas

Coloquio del CINVES-MATH

Carlos Alejandro Alfaro Montúfar

BANXICO

Colaboradores:

- Libby Taylor (Universidad de Stanford)
- Aida Abiad (Eindhoven University of Technology)
- Kristin Heysse (Macalester College)
- Teresa Hoekstra (CIMAT)
- Ralihe Villagrán (Worcester Polytechnic Institute)
- Juan Pablo Serrano (CINVESTAV)
- Marcos Vargas (BANXICO)
- Uriel Medrano (UNAM)
- Iván Téllez (Universidad Autónoma de San Luis Potosí)
- Octavio Zapata (UNAM)

Índice

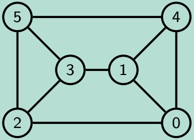
Propiedades de los ideales de distancia

Matrices de distancia

Definición

Sea G una gráfica conexa con n vértices.
La distancia $d_G(u,v)$ entre los vértices u y v es el número de aristas en un camino mínimo entre u y v.
La matriz de distancia $D(G)$ de G es la matriz $n \times n$ cuya entrada (u,v) es la distancia $d_G(u,v)$ entre los vértices u y v.

Ejemplo



G

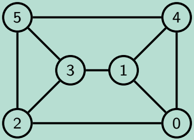
$$D(G) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ideales distancia

Definición

Sea G una gráfica con vértices $V(G) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Las variables $X_G = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ son variables asociadas a $V(G)$.
Definimos la matriz $D_X(G) = diag(x_0, \ldots, x_{n-1}) + D(G)$.

Ejemplo



G

$$D_X(G) = \begin{bmatrix} x_0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & x_1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x_2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & x_3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & x_4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & x_5 \end{bmatrix}$$

Ideales de distancia

Definición

Sea $\mathcal{R}[X_G]$ el anillo de polinomios sobre un anillo conmutativo $\mathcal{R}$ en las variables X_G.

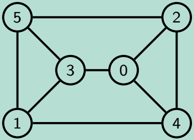
Denotemos por $\mathrm{menores}_k(D_X(G))$ al conjunto de determinantes de las submatrices de tamaño $k \times k$ de $D_X(G)$.

Para $1 \leq k \leq n$, el k-esimo ideal distancia es el ideal $\langle \mathrm{menores}_k(D_X(G)) \rangle$. Y lo denotaremos por $I_k^{\mathcal{R}}(G)$.

Decimos que un ideal es trivial si es igual a $\langle 1 \rangle$ $(= \mathcal{R}[X_G])$.

Ideales distancia del prisma con 6 vértices

Ejemplo



G

$$\begin{bmatrix} x_0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & x_1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x_2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & x_3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & x_4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & x_5 \end{bmatrix}$$

Los primero 3 ideales de distancia son triviales.

Una base de Gröbner para $I_4^{\mathbb{Z}}(G)$ está generada por los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} x_0 + x_3 - 7, x_1 + x_4 - 7, x_2 + x_5 - 7, x_3x_4 - 2x_3 - 2x_4 + 7, \\ x_3x_5 - 5x_3 - 2x_5 + 7, 3x_3 - 3x_5, x_4x_5 - 2x_4 - 2x_5 + 7, \\ 3x_4 + 3x_5 - 21, 3x_5^2 - 21x_5 + 21 \end{aligned}$$

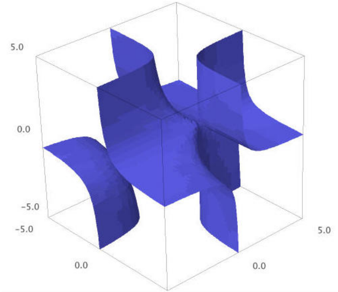
Note $I_n^{\mathcal{R}}(G) = \langle \det(D_X(G)) \rangle$.

Variedades asociadas a los ideales distancia

Definición

La variedad $V(I)$ del ideal I es el conjunto de las raíces comunes de los polinomios en I.

Consideremos la gráfica completa K_3 con 3 vértices.
$I_1^{\mathbb{R}}(K_3) = \langle 1 \rangle \Rightarrow V(I_1^{\mathbb{R}}(K_3)) = \emptyset$.
$I_2^{\mathbb{R}}(K_3) = \langle x_0 - 1, x_1 - 1, x_2 - 1 \rangle \Rightarrow V(I_2^{\mathbb{R}}(K_3)) = \{(1,1,1)\}$.
$I_3^{\mathbb{R}}(K_3) = \langle x_0x_1x_2 - x_0 - x_1 - x_2 - 2 \rangle$.



Cadenas de ideales de distancia y variedades

Se tiene que

$$\langle 1\rangle \supseteq I_1^{\mathcal{R}}(G) \supseteq \cdots \supseteq I_n^{\mathcal{R}}(G) \supseteq \langle 0\rangle.$$

Por lo que

$$V(\langle 1\rangle) \subseteq V(I_1^{\mathcal{R}}(G)) \subseteq \cdots \subseteq V(I_n^{\mathcal{R}}(G)) \subseteq V(\langle 0\rangle).$$

Las variedades de los ideales de distancia generalizan el espectro de las matrices de distancia.

Teorema (Abiad, A., Heysse & Vargas, 2022)

Sean G y H dos gráficas de n vértices. Entonces, G y H son isomorfas si y sólo si existe una permutación σ de $V(H)$ tal que $I_n(G) = I_n(\sigma H)$.

Digráficas fuertemente conexas

Una digráfica G es **fuerte** o **fuertemente conexa** si para cada par de vértices distintos u y v en G existe un camino dirigido de u a v, y un camino dirigido de v a u.

La **distancia** $dist_G(u, v)$ de u a v es el número de arcos en un camino de longitud mínima de u a v.

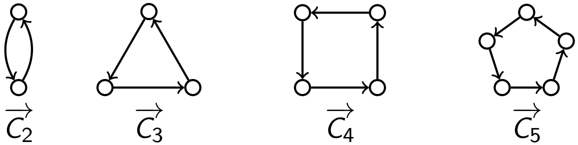


Figura: Los circuitos con 2 a 5 vértices.

Ideales de distancia de $\overrightarrow{C_3}$

$$D_X\left(\overrightarrow{C_3}\right) = \begin{bmatrix} x_0 & 1 & 2 \\ 2 & x_1 & 1 \\ 1 & 2 & x_2 \end{bmatrix}$$

Entonces $I_1^{\mathbb{Z}}\left(\overrightarrow{C_3}\right) = \langle 1 \rangle$ y $I_2^{\mathbb{Z}}\left(\overrightarrow{C_3}\right) = \langle x_0 + 3, x_1 + 3, x_2 + 3, 7 \rangle$.
Mientras que

$$I_3\left(\overrightarrow{C_3}\right) = \left\langle \det D_X\left(\overrightarrow{C_3}\right)\right\rangle = \langle x_0x_1x_2 - 2x_0 - 2x_1 - 2x_2 + 9 \rangle\,.$$

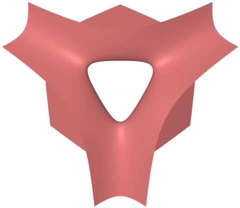


Figura: Vista parcial de la variedad asociada al $I_3\left(\overrightarrow{C_3}\right)$ in $\mathbb{R}^3$.

Matrices de distancia

La transmisión $trs(u)$ de u es $\sum_{v\in V(G)\setminus u} d_G(v,u)$.
Denotemos por

- $trs(G)$ al vector con las transmisiones de los vértices de G, y
- $\deg(G)$ al vector con los grados de los vértices de G.

Así obtenemos las siguientes matrices a partir de D_X;

- $D^L(G)$ a $-D_X(G)\mid_{X=-trs(G)}$,
- $D^Q(G)$ a $D_X(G)\mid_{X=trs(G)}$,
- $D^{deg}(G)$ a $-D_X(G)\mid_{X=-\deg(G)}$, y
- $D^{deg}_+(G)$ a $D_X(G)\mid_{X=\deg(G)}$.

Note que $V\left(I_n^{\mathcal{R}}(G)\mid_{x_i=-t}\right)$ es el espectro de la matriz de distancia de G. Y de manera análoga podemos obtener el espectro de otras matrices de distancia.

Algunas referencias a éstas matrices de distancia:

- M. Aouchiche & P. Hansen. *Distance spectra of graphs: a survey.* **Linear Algebra Appl.** 458 (2014) 301–386.
- F. Buckley & F. Harary. **Distance in graphs.** Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA. 1990.
- L. Hogben & C. Reinhart. *Spectra of Variants of Distance Matrices of Graphs and Digraphs: A Survey.* **La Matematica** 1 (2022) 186–224.

Ideales de distancia y la forma normal de Smith

Forma normal de Smith

Dos matrices M y N son **equivalentes** si existen matrices P y Q unimodulares (cuadrada, entradas en $\mathbb{Z}$ y det $= 1$ ó -1) tal que $M = PNQ$.

La **forma normal de Smith** de una matriz con entradas enteras M es la única matriz diagonal $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0)$ equivalente a M tal que $r = rango(M)$ y $f_i | f_j$ for $i < j$. La denotamos por $\mathrm{SNF}(M)$.

Los **factores invariantes** (o **divisores elementales**) de M son los enteros en la diagonal de $\mathrm{SNF}(M)$.

Teorema (Divisores elementales)

Sea M una matriz con entradas enteras con $f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0$ sus factores invariantes. Para $1 \leq k \leq r$, denote por Δ_k el gcd de los k-menores de M, y $\Delta_0 = 1$. Entonces $f_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$.

La SNF y los ideales de distancia

Proposición

Sea $\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^{V(G)}$. *Si* $f_1(M) \mid \cdots \mid f_r(M)$ *son los factores invariantes positivos de* $M := D_X(G)|_{X=\mathbf{d}}$, *entonces*

$$I_i(G)|_{X=\mathbf{d}} = \langle \Delta_i(M) \rangle = \left\langle \prod_{j=1}^{i} f_j(M) \right\rangle ,$$

para $i \in \{1, \ldots, r\}$, *donde* r *es el rango de* M.

Al evaluar los ideales distancia ($\mathbb{Z}[X]$) en $X = \mathbf{0}$, $trs(G)$, $-trs(G)$, $\deg(G)$ ó $-\deg(G)$ podemos recuperar la SNF de las matrices D, D^Q, D^L, D_{+}^{deg} o D^{deg}, respectivamente.

La SNF y los ideales de distancia

Ejemplo

$$I_k^{\mathbb{Z}}(K_3) = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } k = 1, \\ \langle x_0 - 1, x_1 - 1, x_2 - 1 \rangle & \text{si } k = 2, \\ \langle x_0 x_1 x_2 - x_0 - x_1 - x_2 + 2 \rangle & \text{si } k = 3. \end{cases}$$

- Al evaluar en $X = \mathbf{0}$

  $$I_k^{\mathbb{Z}}(K_3)|_{X=\mathbf{0}} = \langle \Delta_i(D(K_3)) \rangle = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } k = 1, \\ \langle 1 \rangle & \text{si } k = 2, \\ \langle 2 \rangle & \text{si } k = 3. \end{cases}$$

  Entonces $\mathrm{SNF}(D(K_3)) = \mathrm{diag}(1, 1, 2)$.
- Al evaluar en $X = (-2, -2, -2)$, obtenemos $\mathrm{SNF}(D^L(G)) = \mathrm{diag}(1, 3, 0)$
- Al evaluar en $X = (2, 2, 2)$, obtenemos $\mathrm{SNF}(D^Q(G)) = \mathrm{diag}(1, 1, 4)$

Ideales de distancia de las gráficas completas

Se han calculado los ideales distancia para pocas familias:

Teorema (Corrales & Valencia, 2013)

El k-ésimo ideal distancia de la gráfica completa K_n con n vértices es generado por

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^{n}(x_j - 1) + \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i}(x_j - 1) & si\ k = n, \\ \left\{ \prod_{j \in \mathcal{I}}(x_j - 1) : \mathcal{I} \subset [n] \ y \ |\mathcal{I}| = k - 1 \right\} & si\ k < n. \end{cases}$$

Corolario

- $\mathrm{SNF}(D(K_n)) = \mathsf{I}_{n-1} \oplus [n-1]$
- $\mathrm{SNF}(D^L(K_n)) = [1] \oplus n\mathsf{I}_{n-2} \oplus [0]$
- $\mathrm{SNF}(D^Q(K_n)) = [1] \oplus (n-2)\mathsf{I}_{n-2} \oplus [2(n-1)(n-2)]$

Ideales de distancia de las estrellas

Teorema (A. & Taylor, 2020)

Sea $D_X(K_{m,1}) = \begin{bmatrix} \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_m) - 2\mathsf{I}_m + 2\mathsf{J}_m & \mathsf{J}_{m,1} \\ \mathsf{J}_{1,m} & y \end{bmatrix}$.

Entonces $\det(D_X(K_{m,1})) = y \prod_{i=1}^{m}(x_i - 2) + (2y-1)\sum_{i=1}^{m}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{m}(x_j - 2)$.

Para $k \in [m]$*, el* k*-ésimo ideal distancia de la gráfica estrella* $K_{m,1}$ *está generado por* $\langle E_k \cup F_k \rangle$*. Donde*

$$E_k = \left\{ \prod_{i\in\mathcal{I}}(x_i - 2) : \mathcal{I} \subset [m] \text{ y } |\mathcal{I}| = k-1 \right\} \text{ y}$$

$$F_k = \left\{ (2y-1)\prod_{i\in\mathcal{I}}(x_i - 2) : \mathcal{I} \subset [m] \text{ y } |\mathcal{I}| = k-2 \right\}.$$

Corolario

- $\mathrm{SNF}(D(K_{m,1})) = \mathsf{I}_2 \oplus 2\mathsf{I}_{m-2} \oplus [2m]$
- $\mathrm{SNF}(D^L(K_{m,1})) = [1] \oplus (2m+1)\mathsf{I}_{m-1} \oplus [0]$

Problema

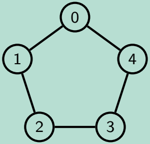
¿Se podrán describir los ideales de distancia de $K_{n,m}$? ¿O de alguna otra familia de gráficas o digráficas?

Clasificaciones

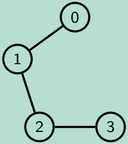
Ideales distancia de subgráficas inducidas

Los ideales de distancia NO se comportan bien al tomar subgráficas inducidas.

Ejemplo



$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \boxed{2} & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ \boxed{2} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



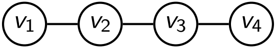
$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \boxed{3} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Lema

P_4 y cualquier gráfica que contenga P_4 como subgráfica inducida tiene segundo ideal distancia trivial.

Prueba. Sea G una gráfica que contiene a P_4 como subgráfica inducida.

Supongamos $P_4 =$ 

.

Entonces $D_X(G)$ contiene la siguiente submatriz

$$M = D_X(G)[V(P_4); V(P_4)] = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 2 & 2 \\ \boxed{1} & x_2 & \boxed{1} & 2 \\ 2 & 1 & x_3 & 1 \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{1} & x_4 \end{bmatrix}$$

Como $\det(M[\{v_2, v_4\}; \{v_1, v_3\}]) = -1$, entonces $I_2^{\mathcal{R}}(G) = \langle 1 \rangle$.

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Es decir, P_4 es **prohibida** para las gráficas con un único ideal distancia trivial.
¿Podemos caracterizar las gráficas con 1 ideal distancia trivial?

Gráficas con un ideal de distancia trivial

Teorema (A. & Taylor,2020)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene solo 1 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{Z}[X]$.*
2. *G es $\{P_4, \mathrm{paw}, \mathrm{diamond}\}$-libre.*
3. *G es $K_{m,n}$ o K_n.*

paw diamond

Teorema (A. & Taylor,2020)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene solo 1 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{R}[X]$.*
2. *G es $\{P_4, \mathrm{paw}, \mathrm{diamond}, \mathrm{C}_4\}$-libre.*
3. *G es $K_{1,n}$ ó K_n.*

Digráficas con un ideal de distancia trivial

Proposición

Para $n \geq 5$, $I_2^{\mathbb{Z}}\left(\overrightarrow{C_n}\right)$ *es trivial y* $I_3^{\mathbb{Z}}\left(\overrightarrow{C_n}\right) = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, n \rangle$.

Es decir, hay un número infinito de digráficas fuertes prohibidas minimales para la familia de digráficas fuertes con un único ideal de distancia trivial.

Proposición

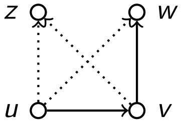
Si G *es una digráfica fuerte con* $\mathrm{diam}(G) \geq 3$, *entonces* $I_2^{\mathbb{Z}}(G) = \langle 1 \rangle$.

Las digráficas fuertes con un único ideal de distancia trivial tienen diámetro a lo más 2.

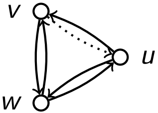
Digráficas con un ideal de distancia trivial

Definition

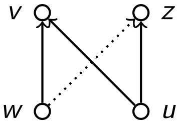
Sea $G = (V, A)$ una digráfica fuerte, un **patrón** $\mathcal{P} = (U, B, C)$ en G es el subconjunto de vértices $U \subseteq V$, junto con dos conjuntos de arcos, B y C, cuyos extremos están en U, donde los arcos de B son arcos en A y los arcos en C no son arcos en A.



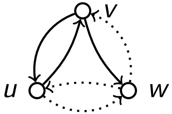
$\mathcal{F}_1$



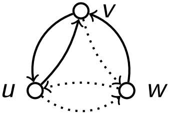
$\mathcal{F}_2$



$\mathcal{F}_3$



$\mathcal{F}_4$



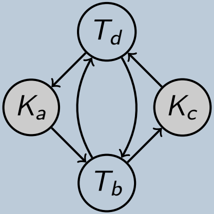
$\mathcal{F}_5$

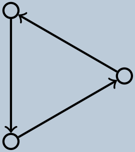
Digráficas con un ideal de distancia trivial

Teorema (A., Hoekstra, Serrano y Villagrán, 2025)

Sea G una digráfica fuerte. Los siguientes enunciados son equivalentes.

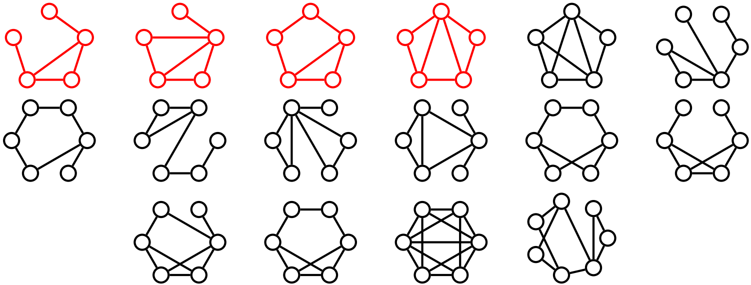
1. *G tiene únicamente un ideal de distancia trivial sobre $\mathbb{Z}[X]$,*
2. *Los patrones $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$ y $\mathcal{F}_5$ son prohibidos para G,*
3. *G es una de las digráficas fuertes descritas por los siguientes diagramas:*





donde T_p denota un conjunto independiente de orden $p \geq 0$, y K_q denota una digráfica completa de orden $q \geq 0$, y un arco entre dos conjuntos, digamos de A a B, significa que existe un arco desde cada vértices en A a cada vértices de B.

Gráficas con dos ideales de distancia triviales



Teorema (A., 2020)

Las gráficas con 2 ideales distancia triviales sobre $\mathbb{Z}[X]$ son libres de las 16 gráficas de arriba y de los ciclos de longitud impar mayores o iguales a 7.

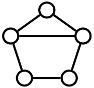
Gráficas de distancia hereditaria

Una gráfica es de distancia hereditaria si para cada subgráfica inducida H de G, y cada par de vértices $u, v \in V(H)$, $d_H(u, v) = d_G(u, v)$.

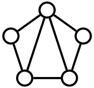
Ed Howorka

Las gráficas de distancia hereditaria:

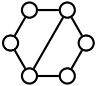
- fueron introducidas por Howorka en 1977.
- se caracterizan por ser gráficas que no tienen una casa, un domino, una gema o un ciclo de longitud de 5 o mayor.



casa



gema



domino

E. Howorka, *A characterization of distance-hereditary graphs.* **Quart. J. Math. Oxford Ser.** 28 (1977) 112 417–420.

Gráficas perfectas

Propiedades de las gráficas de distancia hereditaria:

- son gráficas perfectas, es decir, el número cromático de cada subgráfica inducida es igual al tamaño del mayor clique de ese subgráfica.

Teorema (Fuerte de las gráficas perfectas, Chudnovsky, et. al., 2006)

Una gráfica G es perfecta si y sólo si G y $\overline{G}$ **no** *contienen un ciclo inducido de longitud impar mayor o igual a 5.*

M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *The strong perfect graph theorem*, **Ann. Math.** 164 (1) (2006) 51–229.

Árboles

Hou

Woo

Yaoping Hou y Ching Wah Woo calcularon la SNF de la matriz de distancia de los árboles.
En particular, demostraron que los árboles tienen exactamente 2 factores invariantes iguales a 1. Por lo que

$$\text{árboles} \subseteq \text{gráficas } \{F, \text{odd-holes}\}\text{-libres.}$$

¿Será posible describir los ideales distancia de los árboles?

Y. Hou, Yaoping & C. Woo. *Distance unimodular equivalence of graphs.* **Linear Multilinear Algebra** 56 (2008) 611–626.

Gráficas con 2 ideales de distancia triviales

Teorema (A. Hoekstra-Mendoza, Serrano & Villagrán, 2025)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene a lo más 2 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{Z}[X]$.*
2. *G es $\{\mathcal{F}, \text{odd-holes}_7\}$-libre.*
3. *G es una de las siguientes gráficas:*
   - i) C_5,
   - ii) *una gráfica bipartita conexa,*
   - iii) *una gráfica tripartita completa,*
   - iv) $K_{n-p+1,1,\ldots,1}$ *donde p es el número de particiones,*
   - v) *una subgráfica inducida de*

$$\boxed{\overline{K}_{m_1}} - K_{n_1} - \boxed{\overline{K}_{m_2}} - K_{n_2} - \boxed{\overline{K}_{m_3}}$$

   - vi) *o una subgráfica inducida de*

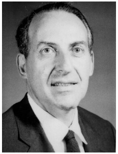
$$K_{n_1} - \boxed{\overline{K}_{m_1}} - \boxed{\overline{K}_{m_2}} - K_{n_2}$$

Árboles

Otras consecuencias

Ron Graham

László Lovász



Henry O. Pollak

La celebrada fórmula de Graham, Lovász y Pollak nos dice que

$$\det(D(T_{n+1})) = (-1)^n n 2^{n-1}$$

para cualquier árbol T_{n+1} de $n+1$ vértices.
Hou y Woo extendieron extendieron el resultado al obtener la SNF de la matriz de distancia para cualquier árbol T_{n+1} de $n+1$ vértices, demostrando que

$$\mathrm{SNF}(D(T_{n+1})) = \mathrm{I}_2 \oplus 2\mathrm{I}_{\mathrm{n}-2} \oplus (2\mathrm{n}).$$

R. Graham & H.O. Pollak. *On the addressing problem for loop switching.* **Bell System Tech. J.** 50 (1971) 2495–2519.
R. Graham & L. Lovász. *Distance matrix polynomials of trees.* **Adv. in Math.** 29 (1978) 60–88.

Otras consecuencias

Teorema (A. Hoekstra-Mendoza, Serrano & Villagrán, 2025)

Los 3-menores de la matriz de distancia de cualquier gráfica bipartita conexa son números pares.

Corolario

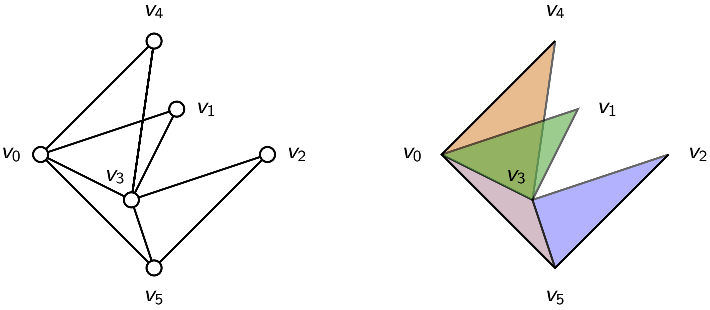
El determinante de la matriz de distancia de cualquier gráfica bipartita conexa es un número par.

¿Será posible obtener la SNF de cualquier gráfica bipartita conexa?

k-árboles

Un k-**clique** es una subgráfica completa de k vértices.

Un k-**árbol** se define recursivamente como una gráfica completa con k vértices, o como una gráfica formada al agregar un nuevo vértice a un k-árbol más pequeño, de manera que, el nuevo vértice esté conectado mediante k nuevas aristas a todos los vértices de un k-clique existente en el k-árbol más pequeño.



Caminos y distancias en k-árboles

Sea T un k-árbol.

Para $d \in \{1, \ldots, k\}$, dos d-cliques τ y τ' en T son **adyacentes** si pertenecen al mismo $(d+1)$-clique σ. En tal caso, τ y τ' son **incidentes** a σ.

De esta forma, si τ y τ' son d-cliques, un d-**camino** entre τ y τ' es una secuencia finita $\tau_1\sigma_1\tau_2\sigma_2\cdots\tau_l$, donde $\tau = \tau_1$, $\tau' = \tau_l$, y τ_i y τ_{i+1} son incidentes al mismo $(d+1)$-clique σ_i.

La d-**ésima** distancia entre los d-cliques τ y τ' es el número de $(d+1)$-cliques en un d-camino mínimo desde τ y τ', y se denota por $\mathrm{dist}^{\mathbf{d}}(\tau, \tau')$.

Note que existe un d-**camino** entre cualquier par de d-cliques en cualquier k-árbol T.

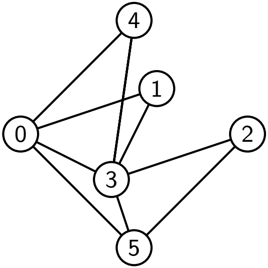
d-ésima matriz de distancia

Sea c_d el número de d-cliques en T.

La d-**ésima matriz de distancia** $\mathrm{D}^d(T)$ del k-árbol T es la matriz de orden $c_d \times c_d$, indexada por los d-cliques de T, tal que

$$\mathrm{D}^d(T)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \mathrm{dist}^d(\sigma_i, \sigma_j) & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

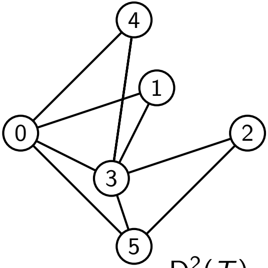
Primer matriz de distancia



$$D^1(T) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Note que $D^1(T) = D(T)$.

Segunda matriz de distancia



$$
D^2(T) = \begin{array}{c} \\ 01 \\ 03 \\ 04 \\ 05 \\ 13 \\ 23 \\ 25 \\ 34 \\ 35 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 01 & 03 & 04 & 05 & 13 & 23 & 25 & 34 & 35 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\
3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

La SNF de D^k de los k-árboles

Teorema (Alfaro-Medrano-Téllez,2026)

Sea $k \geq 1$ y $n \geq k+2$. Para cualquier k-árbol T_n con n vértices, tenemos

$$\mathrm{SNF}(\mathrm{D}^k(T_n)) = \mathrm{I}_{(k-1)(n-k)+2} \oplus (k+1)\mathrm{I}_{n-k-2} \oplus [k(k+1)(n-k)].$$

Corolario (A., Medrano & Téllez,2026)

$\det(\mathrm{D}^k(T_n)) = (-1)^{k(n-k)}k(k+1)^{n-k-1}(n-k).$

¿Se podrá obtener alguna formula para la forma normal de Smith de las d-matrices de distancia de los k-árboles con $d < k$?

Bosquejo de la demostración

- $\mathrm{D}^k(T_n) \sim \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T & \cdots & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & -\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k & \mathbf{0}_{k,k} & \cdots & \mathbf{0}_{k,k} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0}_{k,k} & -\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k & \cdots & \mathbf{0}_{k,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{0}_{k,k} & \mathbf{0}_{k,k} & \cdots & -\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k \end{bmatrix}.$
- $\mathrm{SNF}(-\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, k+1).$
- $\mathrm{D}^k(T_n) \sim \mathrm{I}_{(k-1)(n-k)} \oplus \begin{bmatrix} n-k & 1^T \\ 1 & \mathrm{diag}(k+1, \ldots, k+1) \end{bmatrix}.$
- $\mathrm{SNF} \begin{bmatrix} n-k & 1^T \\ 1 & \mathrm{diag}(k+1, \ldots, k+1) \end{bmatrix} =$ $\mathrm{diag}(1, 1, k+1, \ldots, k+1, k(k+1)(n-k)).$

Referencias:

- C.A. Alfaro, J.U. Medrano & I. Téllez-Téllez, *The Smith normal form of distance matrices of high dimensional trees.* **Comp. Appl. Math.** 45 (2026) 226.
- C.A. Alfaro, T.I. Hoekstra-Mendoza, J.P. Serrano & R.R. Villagrán, *Graphs with two trivial distance ideals over the polynomial ring with integer coefficients.* **ISSAC '25**.
- C.A. Alfaro, T.I. Hoekstra-Mendoza, J.P. Serrano y R.R. Villagrán, *Distance ideals of digraphs.* **Applied Mathematics and Computation** 500 (2025) 129430.
- C.A. Alfaro & O. Zapata. *The degree-distance and transmission-adjacency matrices.* **Comp. Appl. Math.** 43 (2024) 351.
- A. Abiad, C.A. Alfaro, K. Heysse, M.C. Vargas, Codeterminantal graphs, **Linear Algebra and its Applications** 16 (2022) 1531–1548.
- C.A. Alfaro, On graphs with 2 trivial distance ideals, **Linear Algebra and its Applications** 597 (2020) 69–85.
- C.A. Alfaro & L. Taylor, *Distance ideals of graphs*, **Linear Algebra and its Applications** 584 (2020) 127–144.

¡Muchas gracias!

Carlos A. Alfaro

https://alfaromontufar.github.io
alfaromontufar@gmail.com